CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ – OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA JUDEȚEANĂ

2 aprilie 2022

CLASA A VIII-A

1.) Se consideră mulțimile : $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -11\le 2x-7\le 3\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \left|\frac{2x+1}{9}\right|\le 1\right\}$.

Determinați $A\cup B, A\cap B, A\setminus B$ și cardinalul mulțimii $(A\cap B)\cap\mathbb{N}^*$

2.) **a.)** Fie $x, y\in\mathbb{R}$ și $x^2+y^2=48$, iar $x+y=2\sqrt{15}$. Determinați valoarea numărului real $x-y$.

b.) Se consider expresia $E(x)=(2x+1)^2-2(x-1)^2+(1-x)(x+3)$ unde *x* este număr real . Determinați valoarea minimă a lui *E(x)*.

3.) Fie prisma patrulateră $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătratul *ABCD.* Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD, $AB=8\ cm$ și $AA'=8\sqrt{2}\ cm.$

a.) Demonstrați că $A'C$ și AC' sunt perpendiculare

b.) Demonstrează că OB' este paralelă cu $(A'C'D)$.

4.) Fie *ABCD* un tetraedru regulat cu muchia egală cu *a* cm și punctul *O* este centrul feței *BCD*. Calculați :

a.) Distanța de la punctul *O* la planul (*ABC*)

b.) Cosinusul unghiului format de dreapta *AD* cu planul (*BCD*)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.

Timp de lucru 2 ore

A ROMÁNIAI FALVAK OLIMPIÁJA - ORSZÁGOS MATEMATIKAVERSENY

MEGYEI SZAKASZ

2022. április 2.

VIII. OSZTÁLY

1.) Adottak a következő halmazok: $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -11\le 2x-7\le 3\right\}$ és $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|\frac{2x+1}{9}\right|\le 1\right\}$

Határozd meg $A\cup B, A\cap B, A\setminus B$ halmazokat és az $\left(A\cap B\right)\cap\mathbb{N}^*$ halmaz kardinálisát!

2.) **a.)** Legyen $x,y\in\mathbb{R}$ $x^2+y^2=48$ és $x+y=2\sqrt{15}$. Számítsd ki az $x-y$ értékét!

b.) Adott az $E\left(x\right)=\left(2x+1\right)^2-2\left(x-1\right)^2+\left(1-x\right)\left(x+3\right)$ kifejezés, ahol x valós szám.

Határozd meg az $E(x)$ kifejezés minimumát!

3.) Legyen $ABCDA'B'C'D'$ egy egyenes hasáb, amelynek alapja $ABCD$ négyzet. Az O pont az AC és BD egyenesek metszéspontja, $AB=8\ cm$ és $AA'=8\sqrt{2}\ cm$.

a.) Bizonyítsd be, hogy az $A'C$ és AC' egyenesek merőlegesek egymásra!

b.) Bizonyítsd be, hogy az OB' egyenes párhuzamos az $\left(A'C'D\right)$ síkkal!

4.) Legyen $ABCD$ egy szabályos tetraéder, amelynek élhossza a cm és O a BCD lap középpontja. Számítsd ki:

a.) az O pont távolságát az (ABC) síktól!

b.) az AD egyenes és (BCD) sík szögének koszinuszát!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

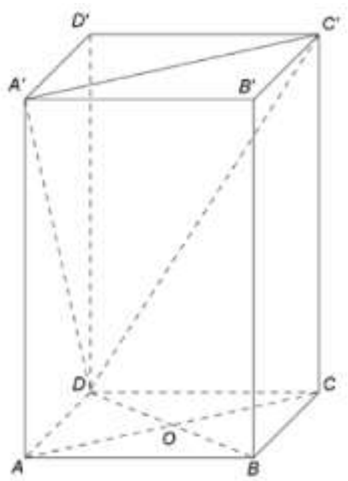
Minden feladat 7 pontot ér.

Munkaidő 2 óra.

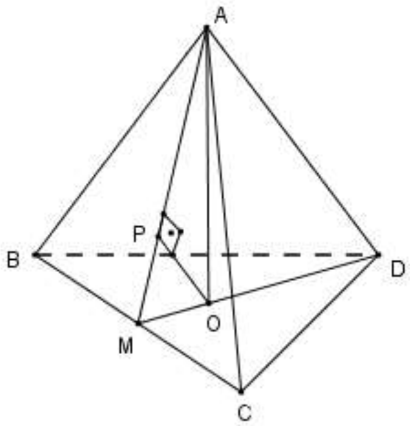
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ – OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
ETAPA JUDEȚEANĂ - 2 aprilie 2022
BAREM DE NOTARE
CLASA A VIII-A

1.)	$-11\le 2x-7\le 3 \;\rvert +7$ $-4\le 2x\le 10 \;\rvert :2$ $-2\le x\le 5\Rightarrow A=[-2,5]$	**2p**
	$\left\lvert\frac{2x+1}{9}\right\rvert\le 1\Leftrightarrow -1\le\frac{2x+1}{9}\le 1 \;\rvert \cdot 9$ $-9\le 2x+1\le 9 \;\rvert -1$ $-10\le 2x\le 8 \;\rvert :2$ $-5\le x\le 4\Rightarrow B=[-5,4]$	**2p**
	$A\cup B=[-5,5],\ A\cap B=[-2,4],\ A\setminus B=(4,5]$	**2p**
	$(A\cap B)\cap\mathbb{N}^*=\{1,2,3,4\}\Rightarrow card\,(A\cap B)\cap\mathbb{N}^*=4$	**1p**

2.)	$a.)\,(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\Rightarrow\left(2\sqrt{15}\right)^2=48+2xy\Rightarrow 60=48+2xy$ $2xy=12$, *deci* $xy=6$	**1p** **1p**
	$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\Rightarrow(x-y)^2=48-12\Rightarrow(x-y)^2=36$ $\Rightarrow\sqrt{(x-y)^2}=6\ \ x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow\lvert x-y\rvert=6\Rightarrow x-y=6$ sau $x-y=-6$	**1p** **1p**
	b.) $E(x)=4x^2+4x+1-2x^2+4x-2+x+3-x^2-3x=x^2+6x+2$	**1p**
	$E(x)=x^2+6x+9-7=(x+3)^2-7$	**1p**
	$(x+3)^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow(x+3)^2-7\ge -7,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow E(x)\ge -7,\forall x\in\mathbb{R}$ Deci valoarea minima a expresiei este -7	**1p**

3.)	**Realizarea desenului** 	**1p**

	a.) ABCD pătrat, AC diagonală deci $AC=8\sqrt{2}\ cm$ $AC=AA'$ și $ACC'A'$ este dreptunghi, deci $ACC'A'$ este pătrat, rezultă că $A'C\perp AC'$	**1p** **2p**
	b.) $A'C'\cap AC=\{O'\}$, $B'O'=DO$ și $B'O'\parallel DO$, deci $DOB'O'$ este paralelogram $\left.\begin{array}{l} B'O\parallel DO' \\ DO'\subset(A'C'D)\end{array}\right\}\Rightarrow OB'\parallel(A'C'D)$	**2p** **1p**

4.)	Realizarea desenului 	**1p**
	$a.)\ \left.\begin{array}{l} \triangle BCD\ echilateral,\ M\in BC:\ BM\equiv MC\Rightarrow DM\perp BC \\ \left.\begin{array}{l}AO\perp(BCD)\\ BC\subset(BCD)\\ OM\perp BC\end{array}\right\}\overset{T3\perp}{\Rightarrow} AM\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(AMD)$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}OP\perp AM\\ OP\subset(AMD)\\ BC\perp(AMD)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}BC\perp OP\\ AM\cap BC=\{M\}\end{array}\right\}\Rightarrow OP\perp(ABC)\Rightarrow d(O,(ABC))=OP$ $OM=\frac{1}{3}DM\Rightarrow OM=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ $\triangle ABC\ echilateral, AM\perp BC\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\triangle AOM:\hat{O}=90^0\overset{T.P}{\Rightarrow}AM^2=OM^2+AO^2\Rightarrow AO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ $\triangle AOM\ \hat{O}=90^0, OP\perp AM\Rightarrow OP=\frac{AO\cdot OM}{AM}\Rightarrow OP=\frac{AO\cdot OM}{AM}\Rightarrow OP=\frac{a\sqrt{6}}{9}$	**1p** **1p**
	$b.)\ \left.\begin{array}{l}AO\perp(BCD)\\ D\in(BCD)\end{array}\right\}\Rightarrow pr_{(BCD)}AD=DO\Rightarrow\sphericalangle(AD,(BCD))=\sphericalangle(AD,DO)=\sphericalangle ADO$ $\Delta AOD:\hat{O}=90^0\Rightarrow\cos(\sphericalangle ADO)=\frac{OD}{AD}\Rightarrow\cos(\sphericalangle ADO)=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}\Rightarrow\cos(\sphericalangle ADO)=\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1p** **2p**