MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2020. február 8.

IX . OSZTÁLY

1.) Oldd meg az $\left[\frac{x^2+x}{2}+2019\right]=|x+2020|$ egyenletet, ahol $[a]$ és $|a|$ az a valós szám egészrészét és modulusát jelöli!

2.) Igazold, hogy bármely n , $n \geq 2$ természetes szám esetén a $\sqrt{2020^n - 2021}$ nem természetes szám!

3.) Igazold az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{a^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\frac{x^{2020}+y^{2020}}{z^{3030}}+\frac{y^{2020}+z^{2020}}{x^{3030}}+\frac{z^{2020}+x^{2020}}{y^{3030}} \geq 2\left(\frac{1}{x^{1010}}+\frac{1}{y^{1010}}+\frac{1}{z^{1010}}\right)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$

4.) Adott az $ABCDE$ körbeírt ötszög. Jelölje H_1, H_2, H_3 és H_4 az ABC, BCD, CDE illetve az ACE háromszögek ortocentrumait. Igazold, hogy az $H_1H_2H_3H_4$ négyszög egy paralelogramma!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.