MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ
2020. február 8.

XII . OSZTÁLY

1.) Bármely $x, y \in \mathbb{C}$ esetén értelmezzük az $x \circ y = xy + \alpha(x+y) + 2\alpha$ művelet, ahol $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

a) Határozd meg α -t úgy, hogy a műveletnek legyen semleges eleme!

b) Felhasználva az a) pontnál kapott eredményt, oldd meg a komplex számok halmazán az $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2n-ori} = 2(x+3)^n, n \in \mathbb{N}^*$ egyenletet!

2.) Legyen $(G,\cdot)$ csoport. Ha létezik $n \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy az $f, g : G \to G, f(x) = x^n$ és $g(x) = x^{n+1}$ függvények szürjektív csoportmorfizmusok, akkor bizonyítsd be, hogy $(G,\cdot)$ Ábel féle csoport.

3.) Adottak az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ és $g(x) = x \cdot e^{2-x}$ függvények. Igazold, hogy a $h : [0,4] \to \mathbb{R}, h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ függvénynek van primitív függvénye majd határozd meg a h egy primitív függvényét, amelynek grafikus képe áthalad a $\left(3; 4 - \frac{4}{e}\right)$ koordinátájú ponton.

4.) Határozd meg az $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényt tudva, hogy $f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x$, bármely $x > 0$ esetén és $f(1) = e$.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.