MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2020. február 8.

XI. OSZTÁLY

1.) Oldd meg $M_2(\mathbb{R})$ -ben az $X^2 = A$ mátrixegyenletet, ahol $A = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.) Adott az $A \in M_2(\mathbb{Q})$ mátrix úgy, hogy $\det\left(A^2 - 2020 I_2\right) = 0$.

Igazold, hogy $A^2 = 2020 I_2$ és $\det(A) = -2020$.

3.) Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat, $x_1 = 15$ és $x_{n+1} = \dfrac{5 + x_n^2}{2x_n}, n \geq 1$.

Tanulmányozd az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergenciáját és határozd meg a határértékét.

4.) Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra $a_1 = 1, a_2 = 2$ és $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot (a_{n+1} - a_n)}, n \geq 2$.

a) Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagképletét.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{a_n}}$ határértéket.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.