

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023****CLASA a XI-a**

**Problema 1.** Determinați funcțiile continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care  $f(1) = e$  și  $f(x+y) = e^{3xy} \cdot f(x) \cdot f(y)$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Fie matricele inversabile  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , astfel ca matricea  $A + B^{-1}$  să fie inversabilă, cu  $(A + B^{-1})^{-1} = A^{-1} + B$ . Arătați că  $\det(AB) = 1$ . Rămâne adevărată concluzia în  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ?

**Problema 3.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ , cu  $a < b$ . Presupunem că  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  este o funcție continuă, cu proprietatea că există  $c, d \in (a, b)$  astfel încât  $f(c) = a$  și  $f(d) = b$ . Arătați că funcția  $f \circ f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  are cel puțin trei puncte fixe. ( $x_0 \in D$  se numește punct fix al funcției  $\varphi : D \rightarrow D$  dacă  $\varphi(x_0) = x_0$ .)

**Problema 4.** Fie matricele  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ , cu proprietatea că  $A^2 = B^2 = O_3$ . Demonstrați că  $AB = BA$  implică  $AB = O_3$ . Arătați că implicația reciprocă este falsă.

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări  
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*