



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘIETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIALFiliera Teoretică: profilul Real – specializarea Științe ale Naturii
XI. osztály**1. feladat**

Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $X(a) = I_2 + aA$ mátrixok, ahol $a \in \mathbb{R}$.

- Igazold, hogy $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$ esetén és határozd meg azokat az (a, b) egész számpárokat, amelyekre $X(a)X(b) = I_2$.
- Határozd meg az a valós számot úgy, hogy teljesüljön a $\det(X(a)X(-a)) \geq 3a + 3$ egyenlőtlenség!
- Határozd meg az $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixot úgy, hogy teljesüljön az $X \cdot X(1) = A$ összefüggés!

2. feladat

Adott az $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x+1) - \ln(x-1)$ függvény.

- Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáit!
- Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} x(f(x) - 2x)$ határértéket!
- Igazold, hogy az $f(x+2) = f(x)$ egyenletnek van legalább egy megoldása az $(1, \infty)$ intervallumban!

3. feladat

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely rendelkezik az $|f(x) - x| \leq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ tulajdonsággal.

- Számítsd ki az $f(0)$ értéket!
- Bizonyítsd be, hogy az f függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban!

4. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot megjelenítjük egy számítógép képernyőjén.

- Egy program az első lépésben az A mátrixot helyettesíti a négyzetével. Ezután megismétlődik a folyamat, a második lépésben a képernyőn az A^3 mátrix jelenik meg, a következő lépésben az A^4 mátrix, és így tovább, a lépések ismétlődnek annyszor, ahányszor a programozó parancsolja. Határozza meg, hány parancsot kell a programozónak kiadnia ahhoz, hogy a képernyőn megjelenő mátrix elemeinek összege 1025 legyen!
- Egy másik program egy lépésben véletlenszerűen az A mátrix egy tetszőleges sorának minden elemét megnöveli 1-gyel, és az így kapott mátrixsal helyettesíti az eredeti A mátrixot a képernyőn. Ezt a lépést megismételi annyszor, ahányszor ezt a programozó megadta. Határozza meg, hogy hány lépést kell beprogramozni ahhoz, hogy a képernyőn megjelenő mátrix elemeinek összege 1025 legyen!