



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023
Secțiunea H1**



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

Filiera tehnologică – toate profilurile
XII. osztály

1. feladat:

Adott az $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ mátrixhalmaz.

- Igazold, hogy ha $X \in A$ és $Y \in A$, akkor $X + Y \in A$.
- Bizonyítsd be, hogy ha $X \in A, Y \in A$ és $XY = O_2$, akkor $X = O_2$ vagy $Y = O_2$.
- Ismertnek tekintjük azt, hogy az A halmaz gyűrűt alkot a mátrixok összeadási és szorzási műveletével. Határozd meg ennek a gyűrűnek az invertálható elemeit!

2. feladat:

Az $M = [0, \infty)$ halmaz a, b eleme esetén értelmezzük az $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$ műveletet.

- Igazold, hogy bármely $a, b \in M$ esetén $a * b \in M$.
- Igazold, hogy a "*" művelet asszociatív!
- Határozd meg az $a \in M$ értékét úgy, hogy $\underbrace{a * a * a * \dots * a}_{2023\text{-szor az } a} = 2a$.

3. feladat:

Adottak az $f, F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ és $F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \cdot \arctg x$ függvények.

- Határozd meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az F függvény az f függvény egy primitívje legyen!
- Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) dx$ integrált!
- Igazold, azt hogy az f függvény minden primitív függvénye szigorúan növekvő a $[0, \infty)$ intervallumon!

4. feladat:

Egy gyorsposta szolgáltatást teljesítő cég autói gázolajat fogyasztanak. Jelöljük $M(t)$ -vel egy autó által egy hét folyamán elfogyasztott gázolaj mennyiségét (literben kifejezve), hétfő 0:00 órától kezdődően a t időpillanatig, ahol $t \in [0, 7]$. A 7-es időpillanat vasárnap 24:00 órának felel meg (a $[0, 1], [1, 2], [2, 3], \dots, [6, 7]$ intervallumok rendre a hétfői, keddi, ..., vasárnapi napoknak felelnek meg azon a héten). Feltételezzük, azt hogy az $M : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriválható, $M(0) = 0$ és $M'(t) = (t^2 + 1) \cdot e^{4-t}, t \in [0, 7]$.

- Bizonyítsd be azt, hogy az $F(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{4-x}, x \in \mathbb{R}$ függvény az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1)e^{4-x}$ függvény egy primitív függvénye!
 - Igazold, hogy $M(t) = 3e^4 - (t^2 + 2t + 3)e^{4-t}$ bármely $t \in [0, 7]$ esetén!
 - Igazold, hogy a hétfői napon egy autó 53 liternél kevesebb gázolajat fogyaszt!
 - Határozd meg azt, hogy a hét melyik napján legnagyobb a gázolajfogyasztás!
- A számolásokban tekintsd úgy, hogy $2,7 < e < 2,8$.