

## CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

## V. Országos Magyar Matematikaolimpia

## XXXII. EMMV

megyei szakasz, 2023. február 4.

## XI. osztály

1. feladat (10 pont). Legyen  $\mathcal{M}$  azon  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  alakú mátrixok halmaza, amelyek teljesítik a  $\det(A^3 - A^2) = 1$  összefüggést.

a) Határozd meg az  $\mathcal{M}$  halmaz elemeit!

b) Oldd meg az  $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$  egyenletet az  $\mathcal{M}$  halmazon!

(\*\*\*)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) A  $\det(A^3 - A^2) = 1$  feltétel egyenértékű a  $(\det A)^2 \cdot \det(A - I_2) = 1$  egyenlőséggel. Mivel az  $A$  mátrix egész együtthatós, ezért  $\det A$  és  $\det(A - I_2)$  egész számok, így a  $(\det A)^2 \cdot \det(A - I_2) = 1$  egyenlőségből adódik, hogy  $\det A = \pm 1$  és  $\det(A - I_2) = 1$ . (1 pont)

Mivel  $\det(A - I_2) = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ 1 & c-1 \end{vmatrix} = (a-1)(c-1) - b = ac - a - c + 1 - b$ , így a  $\det(A - I_2) = 1$  összefüggés átírható  $ac - b = a + c$  alakba, ahol  $ac - b = \det(A)$  a mátrix determinánsa és  $a + c = \text{Tr}(A)$  a mátrix nyoma. A  $\det A = \pm 1$  összefüggést is figyelembe véve azt kaptuk, hogy  $\det(A) = \text{Tr}(A) = \pm 1$ . (1 pont)

Két esetet különböztetünk meg. Ha  $\det(A) = \text{Tr}(A) = 1$ , akkor  $a + c = 1$  és  $ac - b = 1$ , ahonnan kapjuk, hogy  $c = 1 - a$  és  $b = a - a^2 - 1$ . Tehát ebben az esetben a keresett mátrixok  $A = \begin{pmatrix} a & a - a^2 - 1 \\ 1 & 1 - a \end{pmatrix}$  alakúak, ahol  $a \in \mathbb{Z}$ . Ha  $\det(A) = \text{Tr}(A) = -1$ , akkor  $a + c = -1$  és  $ac - b = -1$ , ahonnan kapjuk, hogy  $c = -1 - a$  és  $b = 1 - a - a^2$ . Tehát ebben az esetben a keresett mátrixok  $A = \begin{pmatrix} a & 1 - a - a^2 \\ 1 & -1 - a \end{pmatrix}$  alakúak, ahol  $a \in \mathbb{Z}$ . (2 pont)

b) A Cayley–Hamilton-tétel szerint  $A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$ . Az előző alpont alapján az  $\mathcal{M}$  halmaz elemeire teljesül, hogy  $\det(A) = \text{Tr}(A) = \pm 1$ . (1 pont)

A  $\det(A) = \text{Tr}(A) = 1$  esetben a Cayley–Hamilton-tétel alapján  $A^2 - A + I_2 = O_2$ , tehát  $A^2 = A - I_2$ . Ezt szorozva az  $A$  mátrixszal kapjuk, hogy  $A^3 = A^2 - A = (A - I_2) - A = -I_2$ , ami nem lehetséges. (1 pont)

A  $\det(A) = \text{Tr}(A) = -1$  esetben a Cayley–Hamilton-tétel alapján  $A^2 + A - I_2 = O_2$ , tehát  $A^2 = -A + I_2$ . Ezt szorozva az  $A$  mátrixszal kapjuk, hogy  $A^3 = -A^2 + A = -(-A + I_2) + A = 2A - I_2$ . (1 pont)

Innen  $2A = A^3 + I_2 = \begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -22 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ , így  $A = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ . **(2 pont)**

**Megjegyzés.** Az egész együtthatós mátrixok halmazán is megoldható az  $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$  egyenlet. A  $(\det A)^3 = \det(A^3) = -1$  alapján kapjuk, hogy  $\det(A) = -1$ . A Cayley–Hamilton-tétel alapján  $A^2 - t \cdot A - I_2 = O_2$ , ahol  $t = \text{Tr}(A)$  a mátrix nyoma. Ezt az összefüggést szorozva  $A$ -val következik, hogy

$$A^3 = tA^2 + A = (t^2 + 1)A + tI_2. \quad (1)$$

Kiszámítjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(t^2 + 1)A + tI_2] &= \text{Tr}[(t^2 + 1)A] + \text{Tr}(tI_2) = (t^2 + 1)\text{Tr}(A) + t\text{Tr}(I_2) \\ &= (t^2 + 1) \cdot t + t \cdot 2 = t^3 + 3t, \end{aligned}$$

így az (1) alapján a  $t = \text{Tr}(A)$  nyom teljesíti a  $t^3 + 3t + 4 = 0$  egyenletet. Ennek az egyenletnek  $t = -1$  az egyetlen egész gyöke. Az (1) összefüggés alapján  $A^3 = 2A - I_2$ , ahonnan

$$A = \frac{1}{2}(A^3 + I_2) = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

■

**2. feladat** (10 pont). Adott az  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  mátrix. Határozd meg az  $(a_n)_{n \geq 1}$  és  $(b_n)_{n \geq 1}$  sorozatokat úgy, hogy teljesüljön az  $A^n = a_n A + b_n I_3$  egyenlőség, minden  $n \geq 1$  esetén! **(\*\*\*)**

*Első megoldás.* Hivatalból

**(1 pont)**

Ha léteznek az  $(a_n)_{n \geq 1}$  és  $(b_n)_{n \geq 1}$  számsorozatok, akkor egyértelműek, mivel az  $A$  nem az  $I_3$  mátrix többszöröse. Észrevesszük, hogy  $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_3$  és  $A^2 = 1 \cdot A + 2 \cdot I_3$ , ahonnan  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$  és  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 2$ .

**(1 pont)**

Az  $A^{n+1} = A^n \cdot A = (a_n A + b_n I_3) \cdot A = (a_n + b_n)A + 2a_n I_3$  és  $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3$  alapján  $a_{n+1} = a_n + b_n$  és  $b_{n+1} = 2a_n$ , minden  $n \geq 1$  esetén.

**(2 pont)**

Innen az  $(a_n)_{n \geq 1}$  sorozatra az

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad \forall n \geq 1$$

rekurzió írható fel.

**(1 pont)**

Ez a rekurzió átírható  $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$  alakba, melynek karakterisztikus egyenlete  $r^2 - r - 2 = 0$ .

A karakterisztikus egyenlet gyökei  $-1$  és  $2$ ,

**(2 pont)**

tehát az  $(a_n)_{n \geq 1}$  sorozat általános tagja  $a_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot 2^n$  alakú, minden  $n \geq 1$  esetén, ahol  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Az  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$  tagok segítségével kiszámolható, hogy  $\alpha = -\frac{1}{3}$  és  $\beta = \frac{1}{3}$ .

**(2 pont)**

Innen

$$a_n = -\frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{1}{3} \cdot 2^n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} \text{ és } b_n = 2a_{n-1} = 2 \cdot \frac{2^{n-1} + (-1)^{n-2}}{3} = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3},$$

minden  $n \geq 1$  esetén.

**(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Ha léteznek az  $(a_n)_{n \geq 1}$  és  $(b_n)_{n \geq 1}$  számsorozatok, akkor egyértelműek, mivel az  $A$  nem az  $I_3$  mátrix többszöröse. Az  $A$  mátrixot hatványozva észrevevesszük, hogy

$$A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_3,$$

$$A^2 = 1 \cdot A + 2 \cdot I_3,$$

$$A^3 = 3 \cdot A + 2 \cdot I_3,$$

$$A^4 = 5 \cdot A + 6 \cdot I_3,$$

$$A^5 = 11 \cdot A + 10 \cdot I_3.$$

(1 pont)

Általánosítjuk a kapott eredményt:

$$A^n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} \cdot A + \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3} \cdot I_3, \quad (2)$$

minden  $n \geq 1$  esetén.

(2 pont)

Ezt az egyenlőséget matematikai indukcióval igazoljuk. Az  $n = 1$  esetben

$$A^1 = \frac{2^1 + (-1)^{1-1}}{3} \cdot A + \frac{2^1 + 2 \cdot (-1)^1}{3} \cdot I_3 = \frac{3}{3} \cdot A + \frac{0}{3} \cdot I_3,$$

tehát ebben az esetben a képlet helyes.

(1 pont)

Feltételezzük, hogy  $n = k$  esetén is helyes a képlet, vagyis  $A^k = \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3} \cdot A + \frac{2^k + 2 \cdot (-1)^k}{3} \cdot I_3$ .

Bizonyítjuk, hogy  $n = k + 1$  esetén helyes a képlet:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \cdot A^k = A \cdot \left( \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3} \cdot A + \frac{2^k + 2 \cdot (-1)^k}{3} \cdot I_3 \right) \\ &= \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3} \cdot A^2 + \frac{2^k + 2 \cdot (-1)^k}{3} \cdot A \\ &= \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3} \cdot (A + 2I_3) + \frac{2^k + 2 \cdot (-1)^k}{3} \cdot A \\ &= \left( \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3} + \frac{2^k + 2 \cdot (-1)^k}{3} \right) \cdot A + 2 \cdot \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3} \cdot I_3 \\ &= \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3} \cdot A + \frac{2^{k+1} + 2 \cdot (-1)^{k+1}}{3} \cdot I_3. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

A matematikai indukció módszere alapján a (2) egyenlőség igaz, minden  $n \geq 1$  esetén.

(1 pont)

Tehát a keresett sorozatok  $a_n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3}$  és  $b_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}$ , minden  $n \geq 1$  esetén.

(1 pont)



Harmadik megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Ha léteznek az  $(a_n)_{n \geq 1}$  és  $(b_n)_{n \geq 1}$  számsorozatok, akkor egyértelműek, mivel az  $A$  nem az  $I_3$  mátrix többszöröse. Kiszámoljuk, hogy  $A^2 = A + 2I_3$ , ahonnan  $B = A + I_3$  jelöléssel kapjuk, hogy  $B^2 = 3B$ .

(2 pont)

Innen adódik, hogy  $B^n = 3^{n-1}B$ , minden  $n \geq 1$  esetén.

(1 pont)

Mivel a  $B$  és  $I_3$  mátrixok szorzása felcserélhető, a Newton binomiális tétele alapján

$$A^n = (B - I_3)^n \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k B^k \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k B^k + (-1)^n I_3 = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k 3^{k-1} B + (-1)^n I_3 \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k 3^k \right) B - \frac{(-1)^n}{3} B + (-1)^n I_3$$

$$= \frac{(3-1)^n}{3} B - \frac{(-1)^n}{3} B + (-1)^n I_3 \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \frac{2^n - (-1)^n}{3} B + (-1)^n I_3 = \frac{2^n - (-1)^n}{3} (A + I_3) + (-1)^n I_3$$

$$= \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3, \quad (1 \text{ pont})$$

minden  $n \geq 1$  esetén. Innen  $a_n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3}$  és  $b_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}$ , minden  $n \geq 1$  esetén. (1 pont) ■

**3. feladat** (10 pont). Adott a síkban hat pont, melyek közül bármely három nem kollineáris. A hat pont által meghatározott szakaszokból tízet megrajzolunk. Bizonyítsd be, hogy a hat pont között van három olyan pont, amelyeket összekötő szakaszok meg vannak rajzolva! Igaz-e az állítás, ha csak kilenc szakaszt rajzolunk meg? Indokold a válaszod!

(\*\*\*)

*Megoldás.* Hivatalból (1 pont)

Jelöljük a pontokat  $A, B, C, D, E$  és  $F$  betűkkel. Ha az adott pontok mindegyike legfeljebb másik három ponttal lenne összekötve, akkor legfeljebb  $C_6^2 = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$  szakasz lenne megrajzolva.

(3 pont)

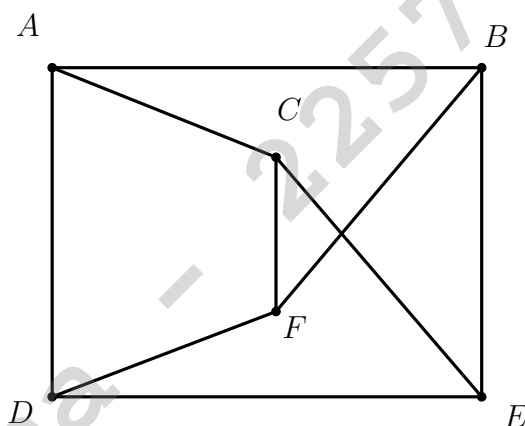
Ezért ha 10 szakaszt rajzoltunk be, akkor a skatulyaelv alapján lesz olyan pont, tegyük fel az  $A$  pont, amely négy másik ponttal van összekötve. Ezek a pontok legyenek  $B, C, D, E$ . (1 pont)

Ha a  $B, C, D$  és  $E$  pontok közül kettőt összeköt még egy megrajzott szakasz, akkor ez a két pont az  $A$ -val együtt egy megrajzott háromszög csúcsai. (1 pont)

Ha a  $B, C, D$  és  $E$  pontokat összekötő szakaszok nincsenek megrajzolva, akkor a fennmaradó 6 szakasz egyik végpontja biztosan az  $F$  pont. Ez viszont nem lehetséges, mert az  $F$  pontból csak 5 pontba tudunk szakaszt rajzolni. (1 pont)

Tehát ha 10 szakasz van megrajzolva, akkor biztosan találunk háromszöget melynek csúcsai az adott pontok. (1 pont)

Ha csak 9 szakaszt kell megrajzoljunk, akkor ki tudjuk küszöbölni a háromszög keletkezését, ahogy az alábbi ábrán látható. (2 pont)



**4. feladat** (10 pont). Adott az  $(a_n)_{n \geq 1}$  sorozat úgy, hogy  $a_1 > 0$  és  $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n^2}$ , minden  $n \geq 1$  esetén. Tanulmányozd az  $(a_n)_{n \geq 1}$  és  $(na_n)_{n \geq 1}$  sorozatok konvergenciáját, és ha konvergensek, akkor számítsd ki a határértéküket!

Matlap 10/2022, L:3524

*Megoldás.* Hivatalból

(1 pont)

Mivel  $a_1 > 0$ , következik, hogy  $a_2 = \frac{a_1}{1+a_1^2} > 0$ . Matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy  $a_n > 0$ , minden  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

(1 pont)

Mivel  $a_{n+1} - a_n = -\frac{na_n^3}{1+na_n^2} < 0$ , minden  $n \geq 1$  esetén, következik, hogy az  $(a_n)_{n \geq 1}$  sorozat szigorúan csökkenő és alulról korlátos, ahonnan következik, hogy az  $(a_n)_{n \geq 1}$  sorozat konvergens.

(2 pont)

Legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  a sorozat határértéke. Feltételezzük, hogy  $l \neq 0$ . Ekkor a rekurziós képletben határértékre térve, kapjuk, hogy  $l = 0$ , ami ellentmondáshoz vezet. Tehát  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(1 pont)

Legyen  $b_n = na_n$ ,  $n \geq 1$ . Ekkor  $b_1 = a_1$  és  $b_2 = 2a_2 = \frac{2a_1}{1+a_1^2} \leq 1$ .

(1 pont)

A  $b_{n+1} - 1 = \frac{(n+1)b_n}{b_n^2+n} - 1 = \frac{(1-b_n)(b_n-n)}{b_n^2+n}$  összefüggésből matematikai indukcióval igazoljuk, hogy  $b_n \leq 1$ , minden  $n \geq 2$  esetén.

(1 pont)

A  $0 < b_n \leq 1$  alapján  $b_{n+1} - b_n = \frac{b_n(1-b_n^2)}{b_n^2+n} \geq 0$ , minden  $n \geq 2$  esetén, ahonnan következik, hogy a  $(b_n)_{n \geq 2}$  sorozat növekvő. Ezenkívül a sorozat felülről korlátos, ezért konvergens. Tehát létezik a  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in (0, \infty)$  határérték.

(1 pont)

Mivel  $b_n = na_n = \frac{n}{\frac{1}{a_n}}$ , ahol az  $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq 1}$  sorozat szigorúan növekvő és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ , ezért teljesülnek a Stolz–Cèsaro-tétel feltételei. De

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1+na_n^2}{a_n} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n} = \frac{1}{b}.$$

Ez a határérték létezik és a Stolz–Cèsaro-tétel alapján megegyezik a  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$  határértékkel, így azt kapjuk, hogy  $b = \frac{1}{b}$ , ahonnan  $b = 1$ . Tehát  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$ .

(2 pont)