

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

megyei szakasz, 2023. február 4.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Számítsd ki az A szám értékét, ha

$$A = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} + \frac{25}{2\sqrt{75}} \right) - \left(\frac{12}{5\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \frac{\sqrt{27}}{27} - \left(\frac{\sqrt{48}}{5} + 2\sqrt{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b) Határozd meg az x természetes szám azon értékeit, amelyekre fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{2^x - 3}{4} < \frac{2^x + 5}{6}$$

és

$$\frac{3^x - 1}{5} > \frac{3^x + 9}{7}.$$

Matlap 9/2022, A:4637

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} + \frac{25}{2\sqrt{75}} \right) - \left(\frac{12}{5\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \frac{\sqrt{27}}{27} - \left(\frac{\sqrt{48}}{5} + 2\sqrt{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{25}{10} - \left(\frac{4\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \frac{3\sqrt{3}}{27} - \left(\frac{\sqrt{16}}{5} + 2 \right) = \\ &= 1 + \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{14}{5} = \\ &= \frac{7}{2} - \frac{27}{10} - \frac{14}{5} = \\ &= \frac{35 - 27 - 28}{10} = -\frac{20}{10} = -2 \end{aligned}$$

(1 pont)

(1 pont)

(1 pont)

(1 pont)

b)

$$\begin{aligned} \frac{2^x - 3}{4} < \frac{2^x + 5}{6} &\Leftrightarrow 3 \cdot (2^x - 3) < 2 \cdot (2^x + 5) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^x \cdot (3 - 2) < 19 \Leftrightarrow x \leq 4 \quad (1) \\ \frac{3^x - 1}{5} > \frac{3^x + 9}{7} &\Leftrightarrow 7 \cdot (3^x - 1) > 5 \cdot (3^x + 9) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^x \cdot (7 - 5) > 52 \Leftrightarrow 3^x > 26 \Leftrightarrow x \geq 3 \quad (2) \end{aligned}$$

(1 pont)

(1 pont)

(1 pont)

(1 pont)

Az (1), (2) és $x \in \mathbb{N}$ feltételek alapján $x \in \{3; 4\}$. (1 pont)

■

2. feladat (10 pont). Határozd meg az \overline{abcd} alakú természetes számokat, amelyekre fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{\overline{ab}}{5} + c + \frac{\overline{cd} + 1}{4} = 12.$$

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

Szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát 20-szal:

$$4\overline{ab} + 20c + 5\overline{cd} + 5 = 240 \quad (1 \text{ pont})$$

Ekvivalens átalakítások után:

$$4\overline{ab} + 70c + 5d = 235 \Leftrightarrow \quad (1 \text{ pont})$$

$$\Leftrightarrow 4\overline{ab} = 5 \cdot (47 - 14c - d) \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $4\overline{ab}$ legalább 40, ezért a jobb oldali zárójelben levő kifejezés legalább 8, így $c \in \{1; 2\}$ (1 pont)

Ha $c = 1$, akkor $4\overline{ab} = 5 \cdot (33 - d)$. A baloldali szám osztható 4-gyel $\Rightarrow d \in \{1; 5; 9\}$ (1 pont)

Ha $d = 1$, akkor $\overline{ab} = 40$, ha $d = 5 \Rightarrow \overline{ab} = 35$, ha $d = 9 \Rightarrow \overline{ab} = 30$ (1 pont)

Ha $c = 2$, akkor $4\overline{ab} = 5 \cdot (19 - d) \Rightarrow d \in \{3; 7\}$ (1 pont)

Ha $d = 3$, akkor $\overline{ab} = 20$, ha $d = 7 \Rightarrow \overline{ab} = 15$ (1 pont)

A megoldások: 4011; 3515; 3019; 2023 és 1527. (1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

Szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát 20-szal:

$$4\overline{ab} + 20c + 5(\overline{cd} + 1) = 240 \quad (1 \text{ pont})$$

Ekvivalens átalakítások után:

$$40a + 4b + 70c + 5d = 235 \quad (2 \text{ pont})$$

Egy tag kivételével, az összefüggés minden tagja osztható 5-tel $\Rightarrow b : 5 \Rightarrow b \in \{0; 5\}$ (1 pont)

Ha $b = 0 \Rightarrow 40a + 70c + 5d = 235 \Rightarrow 8a + 14c + d = 47$

Figyelembe véve, hogy $a \neq 0; c \neq 0 \Rightarrow c \in \{1; 2\}$ (1 pont)

Ha $c = 1 \Rightarrow 8a + d = 33 \Rightarrow (a; d) \in \{(3; 9); (4; 1)\}$

Ha $c = 2 \Rightarrow 8a + d = 19 \Rightarrow a = 2; d = 3$ (1 pont)

Ha $b = 5 \Rightarrow 40a + 70c + 5d = 215 \Rightarrow 8a + 14c + d = 43$

Figyelembe véve, hogy $a \neq 0; c \neq 0 \Rightarrow c \in \{1; 2\}$ (1 pont)

Ha $c = 1 \Rightarrow 8a + d = 29 \Rightarrow a = 3; d = 5$

Ha $c = 2 \Rightarrow 8a + d = 15 \Rightarrow a = 1; d = 7$ (1 pont)

Megoldások: 3019; 4011; 2023; 3515; 1527. (1 pont)

■

Harmadik megoldás. Hivatalból (1 pont)
Szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát 20-szal:

$$4\overline{ab} + 20c + 5(\overline{cd} + 1) = 240 \quad (1 \text{ pont})$$

Ekvivalens átalakítások után:

$$40a + 4b + 70c + 5d = 235 \quad (2 \text{ pont})$$

Észrevesszük, hogy $c \leq 3$

Figyelembe véve, hogy $a \neq 0$; $c \neq 0 \Rightarrow c \in \{1; 2\}$ (1 pont)

Ha $c = 1 \Rightarrow 40a + 4b + 5d = 165$

Egy tag kivételével, az összefüggés minden tagja osztható 5-tel $\Rightarrow b : 5 \Rightarrow b \in \{0; 5\}$ (1 pont)

Ha $b = 0 \Rightarrow 40a + 5d = 165 \Rightarrow 8a + d = 33 \Rightarrow (a; d) \in \{(3; 9); (4; 1)\}$

Ha $b = 5 \Rightarrow 40a + 5d = 145 \Rightarrow 8a + d = 29 \Rightarrow a = 3; d = 5$ (1 pont)

Ha $c = 2 \Rightarrow 40a + 4b + 5d = 95$

Egy tag kivételével, az összefüggés minden tagja osztható 5-tel $\Rightarrow b : 5 \Rightarrow b \in \{0; 5\}$

Ha $b = 0 \Rightarrow 40a + 5d = 95 \Rightarrow 8a + d = 19 \Rightarrow a = 2; d = 3$ (1 pont)

Ha $b = 5 \Rightarrow 40a + 5d = 75 \Rightarrow 8a + d = 15 \Rightarrow a = 1; d = 7$ (1 pont)

Megoldások: 3019; 4011; 3515; 2023; 1527. (1 pont)

■

Megjegyzés.

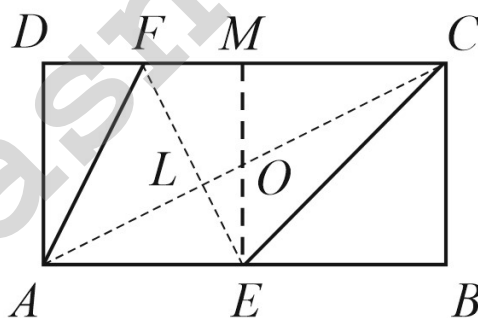
1-2 megoldás kitalálása, levezetés nélkül. (1 pont)

Az összes megoldás felírása, levezetés nélkül. (2 pont)

3. feladat (10 pont). Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2 \cdot BC$, E az AB oldal felezőpontja, F pedig a DC oldal olyan pontja, amelyre $\frac{DF}{FC} = \frac{1}{3}$. Tudjuk, hogy $AC = 20$ cm.

- Igazold, hogy $AC \perp EF$!
- Számítsd ki az $AECF$ négyszög területét!
- Mekkora az $ABCD$ téglalap területe?

Simon József, Csíkszereda



Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

- a) Legyen M a DC oldal felezőpontja $\Rightarrow F$ a DM oldal felezőpontja. Legyen $AC \cap ME = \{O\}$.
Mivel $AECM$ paralelogramma $\Rightarrow O$ az ME szakasz felezőpontja. (ábra)

(1 pont)

Legyen $FE \cap AC = \{L\}$. $AEO_{\Delta} \equiv EMF_{\Delta}$ (b-b eset)

(1 pont)

$\Rightarrow \widehat{EAL} \equiv \widehat{LEO}$, de $\widehat{LEO} + \widehat{AEL} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAL} + \widehat{AEL} = 90^\circ$

(1 pont)

Így $\widehat{ALE} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp EF$.

(1 pont)

b)

$$T_{AECF} = T_{AEF} + T_{CEF} = \frac{EF \cdot AL}{2} + \frac{EF \cdot CL}{2} = \frac{EF}{2} \cdot (AL + CL) = \frac{EF \cdot AC}{2}. \quad (1,5 \text{ pont})$$

$$AC = 20 \text{ cm}, AO = \frac{AC}{2}; EF = AO \Rightarrow EF = 10 \text{ cm}. \quad (1 \text{ pont})$$

Így

$$T_{AECF} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ cm}^2. \quad (0,5 \text{ pont})$$

c)

$$T_{ADF} = \frac{1}{8} \cdot T_{ABCD}$$

és

$$T_{BEC} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD} \Rightarrow T_{ADF} + T_{BEC} = \frac{3}{8} \cdot T_{ABCD} \Rightarrow T_{AECF} = \frac{5}{8} \cdot T_{ABCD}. \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát

$$T_{ABCD} = \frac{8}{5} \cdot T_{AECF} = \frac{8}{5} \cdot 100 = \frac{800}{5} = 160 \text{ cm}^2. \quad (1 \text{ pont})$$

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

- a) Legyen M a DC oldal felezőpontja $\Rightarrow F$ a DM oldal felezőpontja. Legyen $AC \cap ME = \{O\}$.
Mivel $AECM$ paralelogramma $\Rightarrow O$ az ME szakasz felezőpontja. (ábra)

(1 pont)

Legyen $FE \cap AC = \{L\}$. $AEO_{\Delta} \equiv EMF_{\Delta}$ (b-b eset)

(1 pont)

$\Rightarrow \widehat{EAL} \equiv \widehat{LEO}$, de $\widehat{LEO} + \widehat{AEL} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAL} + \widehat{AEL} = 90^\circ$

(1 pont)

Így $\widehat{ALE} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp EF$.

(1 pont)

b) Legyen $BC = x \Rightarrow AB = 2x$

Az ABC_{\triangle} derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 400 = 4x^2 + x^2 \Rightarrow \quad (1 \text{ pont})$$

$$\Rightarrow x = 4\sqrt{5} \Rightarrow BC = 4\sqrt{5} \text{ cm}, AB = 8\sqrt{5} \text{ cm} \quad (1 \text{ pont})$$

Legyen $FN \perp AE$, $N \in AE \Rightarrow FNAD$ téglalap $\Rightarrow FN = 4\sqrt{5} \text{ cm}$

$AEMD$ négyzet $\Rightarrow EM = 4\sqrt{5} \text{ cm}$

$$T_{AECF} = T_{AEF} + T_{FEC} = \frac{AE \cdot FN}{2} + \frac{FC \cdot EM}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} + \frac{6\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 40 + 60 = 100 \text{ cm}^2 \quad (2 \text{ pont})$$

c)

$$T_{ABCD} = AB \cdot BC = 8\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 160 \text{ cm}^2 \quad (1 \text{ pont})$$

■

4. feladat (10 pont). Észak- és Dél-Meseország között egy olyan átjáró van, amelyen ha áthalad egy sárkány észak-dél irányban, fejeinek száma megkétszereződik, viszont ha dél-észak irányban kel át, fejeinek száma kettővel csökken. Egy 20 tagú sárkányokból álló csoport egyik nap átkelt, a másik nap visszajött az átjárón. Visszatérésük után összesen 8 fejjel többlet rendelkeztek, mint amikor elindultak. Az utazás során egyetlen sárkánynak sem esett bántódása (mindvégig minden sárkánynak legalább egy feje volt).

- Hány feje lehetett a sárkányoknak összesen az indulás előtt?
- Legtöbb hányféle fejű sárkány lehetett a csoportban visszaérkezésük pillanatában?
- Az utazás során legtöbb hány feje lehetett az egyik sárkánynak?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Jelöljük az összes sárkányfejek számát induláskor x -szel. Annak megfelelően, hogy a sárkányok az átkelőn először északról délre vagy délről északra haladnak át, két különböző esetet kell tárgyalnunk.

(1 pont)

I. eset: észak dél irány

Ekkor az átjárón való első átkelés után a sárkányoknak $2x$ fejük lesz összesen, majd a visszatérés után $2x - 2 \cdot 20 = 2x - 40$, ami a feladat szerint 8-cal több, mint induláskor, így felírható a $2x - 40 = x + 8$ egyenlet, ahonnan $x = 48$.

(1 pont)

Ebben az esetben már induláskor minden sárkány legalább kétfejű kellett legyen, hiszen 1 fej esetén visszatéréskor az adott sárkány fej nélkül maradt volna, ami nem lehet.

(1 pont)

Mivel minden sárkány legalább 2 fejű, a legtöbbféle sárkányt akkor kapjuk, ha a fennmaradó $48 - 2 \cdot 20 = 8$ sárkányfejet a lehető legtöbb különböző darabszámú csoportra bontjuk, és úgy osztjuk szét azokat. Ekkor $8 = 1 + 2 + 5$ vagy $8 = 1 + 3 + 4$, tehát legfeljebb négyféle sárkány lehet (pl. 2, 3, 4, 7 vagy 2, 3, 5, 6 fejű).

(1 pont)

Mivel minden sárkány legalább 2 fejű, a legtöbb fejű sárkányt úgy kapjuk, ha a fennmaradó 8 fej egy sárkányé, így a legtöbb fejű sárkány induláskor legfeljebb 10 fejű, az első átkelés után 20 fejű, majd érkezéskor 18 fejű. (1 pont)

II. eset: dél észak irány

Ekkor az átjárón való első átkelés után a sárkányoknak $x - 2 \cdot 20$ fejük lesz összesen, majd a visszatérés után $2 \cdot (x - 40)$, ami a feladat szerint 8-cal több, mint induláskor, így felírható a $2 \cdot (x - 40) = x + 8$ egyenlet, ahonnan $x = 88$. (1 pont)

Ebben az esetben már induláskor minden sárkány legalább háromfejű kell legyen, hiszen mivel az első átkelés után két fejet vesztenek, az ennél kevesebb fejűek fej nélkül maradnának, ami nem lehet. (1 pont)

Mivel minden sárkány legalább 3 fejű, a legtöbbféle sárkányt akkor kapjuk, ha a fennmaradó $88 - 3 \cdot 20 = 28$ sárkányfejet a lehető legtöbb különböző darabszámú csoportra bontjuk, és úgy osztjuk szét azokat. Ekkor $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, tehát legfeljebb nyolcféle sárkány lehet (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, illetve 10 fejű). (1 pont)

Mivel minden sárkány legalább 3 fejű, a legtöbb fejű sárkányt úgy kapjuk, ha a fennmaradó 28 fej egy sárkányé, így a legtöbb fejű sárkány induláskor legfeljebb 31 fejű, az első átkelés után 29 fejű, majd érkezéskor 58 fejű. (1 pont)

