V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

VI. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg az A és B halmaz elemeit, ha egyidejűleg teljesítik a következő feltételeket:

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
ii) $A \cap B = \{4, 5\}$
iii) $8 \in A \setminus B$
iv) az A halmaz elemeinek összege 22.

Szilveszter Ibolya, Temesvár
Vad Márta, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
$A \cap B = \{4, 5\} \Rightarrow 4, 5$ az A és B halmazoknak elemei **(2 pont)**

$$8 \in A \setminus B \Rightarrow 8 \in A, \text{ de } 8 \notin B$$ **(2 pont)**

Tehát az A halmaz tartalmazza a 4, 5 és 8 számokat.

$$22 - (4 + 5 + 8) = 5$$ **(1 pont)**

Mivel az 5 a fenti elemekből csak 2 és 3 összegeként írható fel, ezért

$$A = \{2, 3, 4, 5, 8\}$$ **(2 pont)**
$$B = \{1, 4, 5, 6, 7\}.$$ **(2 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Határozd meg azt a legkisebb $\overline{abcd}$ alakú természetes számot, amelyre

$$\frac{\overline{ab}}{80} = \frac{c}{8} = \frac{\overline{cd}}{92}.$$

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

$$\frac{\overline{ab}}{80} = \frac{c}{8} \Leftrightarrow 8 \cdot \overline{ab} = 80 \cdot c$$ **(1 pont)**

Az egyenlőség mindkét oldalát osztjuk 8-cal $\Rightarrow \overline{ab} = 10 \cdot c$. **(1 pont)**
Azt kapjuk, hogy $b = 0$ és $a = c$. **(1 pont)**

$$\frac{c}{8} = \frac{\overline{cd}}{92} \Leftrightarrow 92 \cdot c = 8 \cdot \overline{cd} \Leftrightarrow 23 \cdot c = 2 \cdot \overline{cd}$$ **(1 pont)**

Felírhatjuk, hogy $23c = 20c + 2d \Leftrightarrow 3c = 2d$. (**1 pont**)

Következik, hogy $c \,\vdots\, 2$ és $d \,\vdots\, 3$. (**1 pont**)

A lehetséges esetek: $\begin{cases} c = 2 \\ d = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} c = 4 \\ d = 6 \end{cases}$ és $\begin{cases} c = 6 \\ d = 9 \end{cases}$. (**1 pont**)

A kapott számok: 2023, 4046 és 6069. (**1 pont**)

A feltételnek megfelelő szám a 2023. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

$$\frac{\overline{ab}}{80} = \frac{\overline{cd}}{92} = \frac{c}{8} \Leftrightarrow \frac{100 \cdot \overline{ab}}{8000} = \frac{\overline{cd}}{92} = \frac{100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}}{8000 + 92} = \frac{\overline{abcd}}{8092} = \frac{c}{8}$$ (**4 pont**)

A legkisebb $\overline{abcd}$ számot akkor kapjuk, amikor a c számjegy a legkisebb. (**2 pont**)

$c = 0$ esetén $\overline{abcd} = 0$, ami nem négyjegyű (**1 pont**)

$c = 1$ esetén $\overline{abcd} = 1011,5$, ami nem természetes (**1 pont**)

$c = 2$ esetén $\overline{abcd} = 2023$, a legkisebb ilyen szám (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Legyenek AA', BB', CC' az O pontban összefutó egyenesek úgy, hogy az A és B pontok ugyanabban a félsíkban vannak a CC' egyeneshez képest, és a B pont az $\widehat{AOC}$ belső tartományában helyezkedik el. Továbbá legyen OM az $\widehat{AOB}$, OM' az $\widehat{A'OB'}$, OP a $\widehat{BOC}$ és OP' a $\widehat{B'OC'}$ szögfelezője.

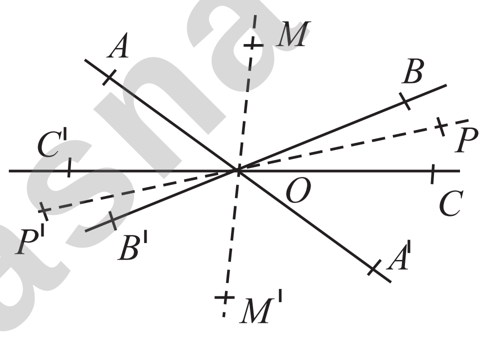
a) Számítsd ki az $\widehat{AOP'}$, $\widehat{MOB}$, $\widehat{POC}$ és $\widehat{M'OA'}$ szögek mértékének összegét.

b) Ha $\widehat{MOP} = 72^\circ$, számítsd ki az $\widehat{AOC'}$ mértékét.

Matlap 10/2022, A:4654

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) M, O, M' és P, O, P' kollineáris pontok (**1 pont**)



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'} \text{ (csúcsszögek)} \\ OM,\ OM' \text{ szögfelezők} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AOM} \equiv \widehat{MOB} \equiv \widehat{A'OM'} \equiv \widehat{M'OB'}$$ (**1 pont**)

Hasonlóan $\widehat{COP} \equiv \widehat{POB} \equiv \widehat{C'OP'} \equiv \widehat{P'OB'}$ (**1 pont**)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \widehat{AOP'} + \widehat{MOB} + \widehat{POC} + \widehat{M'OA'} = \\
&= \widehat{AOP'} + \widehat{M'OB'} + \widehat{P'OB'} + \widehat{M'OA'} = && \textbf{(1 pont)} \\
&= \widehat{AOP'} + \widehat{P'OB'} + \widehat{B'OM'} + \widehat{M'OA'} = \\
&= \widehat{AOA'} = 180^\circ && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\widehat{MOP} = 72^\circ \Rightarrow \widehat{MOB} + \widehat{BOP} = 72^\circ \\
&\widehat{MOB} \equiv \widehat{MOA}\ (OM \text{ félegyenes szögfelező}) \\
&\widehat{BOP} \equiv \widehat{POC}\ (OP \text{ félegyenes szögfelező}) \\
&\widehat{AOC} = \widehat{AOM} + \widehat{MOB} + \widehat{BOP} + \widehat{POC} && \textbf{(1 pont)} \\
\Rightarrow\ &\widehat{AOC} = 2 \cdot (\widehat{MOB} + \widehat{BOP}) = 2 \cdot 72^\circ = 144^\circ && \textbf{(1 pont)} \\
&\widehat{AOC'} = 180^\circ - \widehat{AOC} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ && \textbf{(1 pont)} \\
\Rightarrow\ &\widehat{AOC'} = 36^\circ && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

■

4. feladat (10 pont)**.** A d egyenesen felvesszük az $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_9, A_{10}$ pontokat ebben a sorrendben úgy, hogy

$$A_0A_1 = \frac{2}{3}A_0A_{10},\ A_1A_2 = \frac{2}{3}A_1A_{10}, \ldots,\ A_8A_9 = \frac{2}{3}A_8A_{10}.$$

Tudva, hogy az A_0A_{10} szakasz hossza 3^9 m, számítsd ki:

a) az A_1A_2 és A_3A_4 szakaszok hosszát,

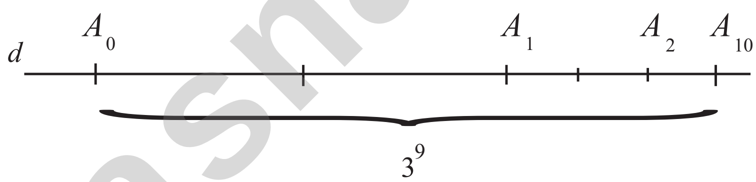
b) az MN szakasz hosszát, ahol M és N az A_1A_2, illetve A_3A_4 szakaszok felezőpontjai,

c) $1 + 3 + \ldots + 3^8$ összeget.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a)



$$\begin{aligned}
A_0A_1 &= \frac{2}{3}A_0A_{10} = \frac{2}{3} \cdot 3^9 = 2 \cdot 3^8 \text{ m} \\
A_1A_{10} &= A_0A_{10} - A_0A_1 = 3^9 - 2 \cdot 3^8 = 3 \cdot 3^8 - 2 \cdot 3^8 = 3^8 \text{ m} && \textbf{(1 pont)} \\
A_1A_2 &= \frac{2}{3}A_1A_{10} = \frac{2}{3} \cdot 3^8 = 2 \cdot 3^7 \text{ m} && \textbf{(1 pont)} \\
A_2A_{10} &= A_1A_{10} - A_1A_2 = 3^8 - 2 \cdot 3^7 = 3^7 \text{ m}
\end{aligned}$$

Az eljárást folytatva kiszámíthatjuk, hogy

$$A_2A_3 = 2 \cdot 3^6,\ A_3A_4 = 2 \cdot 3^5, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ugyanakkor

$$A_4A_5 = 2 \cdot 3^4, A_5A_6 = 2 \cdot 3^3, \ldots, A_8A_9 = 2 \text{ m}, A_9A_{10} = 1 \text{ m}.$$

b) Mivel M és N az A_1A_2 illetve A_3A_4 szakaszok felezőpontjai, így

$$MN = MA_2 + A_2A_3 + A_3N \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$MN = 3^7 + 2 \cdot 3^6 + 3^5 = 3^5 \cdot (3^2 + 2 \cdot 3 + 1) = 3^5 \cdot 16 = 243 \cdot 16 = 3888 \text{ m} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

c) Az A_0A_{10} szakasz hossza az $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_8A_9$ és A_9A_{10} szakaszok hosszának az összege, vagyis

$$A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_7A_8 + A_8A_9 + A_9A_{10} = A_0A_{10} \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$2 \cdot 3^8 + 2 \cdot 3^7 + 2 \cdot 3^6 + \ldots + 2 \cdot 3^1 + 2 + 1 = 3^9,$$

ahonnan

$$2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + 2 \cdot 3^7 + 2 \cdot 3^8 = 3^9 - 1.$$

Elosztva az egyenlőséget 2-vel kapjuk, hogy

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^7 + 3^8 = \frac{3^9 - 1}{2} = \frac{19683 - 1}{2} = 9841. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■