



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile

XII. Osztály

1. Tétel

A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = -2xy + 4x + 4y - 6$ műveletet, bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

- Igazold, hogy a $*$ művelet asszociatív, és határoz meg a semleges elemét!
- Határozd meg az x egész számokat, amelyekre $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2022 \text{ - szer}} = x$.
- Egy táblára felírjuk a 0-tól 31-ig terjedő számokat. Egy tanuló véletlenszerűen letöröl két, a és b számot, és helyettük, az a és b számok $*$ művelet alapján kapott eredményét írja fel. Melyik az a szám, amelyiket a tanuló utoljára ír fel a táblára, ha addig ismétli ezt az eljárást, amíg csak egy szám marad a táblán?

2. Tétel

Adottak az $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok, az $M(t) = -\frac{t}{3}A + \frac{t^2}{3}B$, $t \in \mathbb{R}$ összefüggés és a $G = \{M(t) / t \in \mathbb{R}^*\}$

halmaz.

- Határozd meg az A^2 és $A \cdot B$ mátrixokat!
- Igazold, hogy a G halmaz stabil részhalmaza az $M_3(\mathbb{R})$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve!
- Igazold, hogy a (G, \cdot) Ábel-féle csoport, ahol \cdot a mátrixok szorzását jelöli!

3. Tétel

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$ függvény.

- Számítsd ki: $\int_0^1 f(x) dx$.
- Határozd meg az $a > 1$ valós számot úgy, hogy $\int_1^a (f(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$
- Számítsd ki: $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot f^{2022}(x) dx$.

4. Tétel

Egy tenyészedényben a $t = 0$ időpontban 1000 baktérium van. Észrevették, hogy az $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(t) =$ az edényben levő baktériumok száma a t időpontban, képlettel értelmezett függvény esetén teljesül az $f'(t) = 0,02 \cdot t \cdot f(t)$ összefüggés, bármely $t \geq 0$ esetén, ahol f' az f függvény deriváltját jelenti.

- Határozd meg az ezzel a tulajdonsággal rendelkező f függvényt!
- Igazold, hogy bármely $t \geq 10$ esetén az edényben lévő baktériumok száma nagyobb, mint 2700.

Megjegyzés: Munkaidő 3 óra; Minden tétel kötelező; Minden tételt 0-tól 7 pontig értékelnek.