



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a XII-a

Subiectul 1.

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x * y = -2xy + 4x + 4y - 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Arătați că legea "*" este asociativă și determinați elementul neutru al legii.
- Determinați numerele întregi x pentru care $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2022 \text{ de ori}} = x$.
- Pe o tablă sunt scrise numerele de la 0 la 31. Un elev șterge la întâmplare două numere a și b și în locul lor scrie rezultatul compunerii lui a cu b după legea "*". Aflați ce număr se va scrie ultimul pe tablă dacă elevul repetă cele prezentate până când pe tablă rămâne un singur element.

Subiectul 2.

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(t) = -\frac{t}{3}A + \frac{t^2}{3}B$, $t \in \mathbb{R}$. Considerăm mulțimea $G = \{M(t) / t \in \mathbb{R}^*\}$.

- Determinați matricele A^2 și $A \cdot B$.
- Arătați că mulțimea G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor.
- Demonstrați că (G, \cdot) este grup abelian, unde " \cdot " reprezintă înmulțirea matricilor.

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$.

- Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- Să se determine numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a (f(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$
- Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot f^{2022}(x) dx$.

Subiectul 4.

Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t = 0$, 1000 de bacterii. S-a observat că funcția $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, definită prin $f(t) =$ numărul de bacterii din vas la momentul t , satisface relația $f'(t) = 0,02 \cdot t \cdot f(t)$, pentru orice $t \geq 0$, unde f' reprezintă derivata funcției f .

- Determinați funcția f cu această proprietate.
- Demonstrați că pentru orice $t \geq 10$ numărul bacteriilor din vas este mai mare decât 2700.