

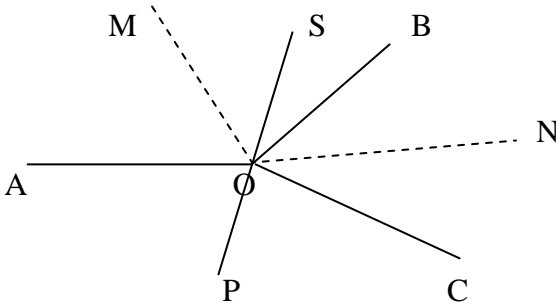
## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

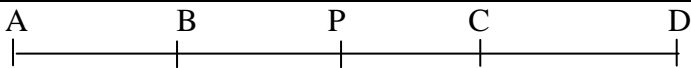
## ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

## BAREM

## CLASA A VI-A

1.)	Din oficiu	1p
	Deoarece produsul a trei numere impare consecutive este o cincime din numărul $\overline{ABABAB}$ , rezultă că $\overline{ABABAB}$ este de 5 ori produsul celor trei numere impare consecutive, de unde rezultă că $\overline{ABABAB}$ este divizibil cu 5 și $\overline{ABABAB}$ este număr impar. Deci, $B = 5$ .	2p
	$\overline{A5A5A5} = \overline{A5} \cdot 10000 + \overline{A5} \cdot 100 + \overline{A5} = \overline{A5} \cdot 10101$	1p
	$10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$ $\overline{A5A5A5} = \overline{A5} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$	2p
	Deoarece $\overline{A5A5A5} = \overline{A5} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 37 = (10A + 5) \cdot 7 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 37 = 5 \cdot (2A + 1) \cdot 7 \cdot 37 \cdot 3 \cdot 13$ este de 5 ori produsul a trei numere impare consecutive, rezultă că $(2A + 1) \cdot 7 \cdot 37 \cdot 3 \cdot 13$ este produsul a trei numere impare consecutive. Unul dintre cele trei numere impare consecutive este divizibil cu 37. Dacă acel număr ar fi $37 \cdot 3 = 111$ atunci celelalte două ar fi mai mari decât 100, iar produsul celor trei numere ar fi mai mare decât 1000000, ceea ce nu este posibil. Deci unul dintre cele trei numere impare consecutive este 37. Al doilea număr este divizibil cu 13, deci poate fi numai 39, care este egal cu $3 \cdot 13$ . Al treilea număr este divizibil cu 7, deci poate fi numai 35. Atunci $(2A + 1) \cdot 7 = 35 \Rightarrow 2A + 1 = 5 \Rightarrow A = 2$ .	4p
2.)	Din oficiu	1p
	$A = \frac{6}{1} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot \dots \cdot \frac{5964}{1987} \cdot \frac{5967}{1988} \cdot \frac{1}{1989} = \frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{3 \cdot 1988}{1987} \cdot \frac{3 \cdot 1989}{1988} \cdot \frac{1}{1989}$	3p
	$A = \frac{3^{1988} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1988 \cdot 1989}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1987 \cdot 1988 \cdot 1989}$	2p
	$A = 3^{1988}$	2p
	$A = 3^{1988} = (3^4)^{497} = 81^{497}$ Ultima cifră a numărului $81^{497}$ este 1, deci ultima cifră a numărului $A$ este 1.	2p
3.)	Din oficiu	1p
	Desen 	1p

	<p><b>a)</b> Fie <math>[OM]</math> bisectoarea unghiului <math>\hat{AOB}</math> și <math>[ON]</math> bisectoarea unghiului <math>\hat{BOC}</math>. Atunci <math>m(\hat{MON}) = 115^\circ</math>.  <math display="block">m(\hat{AOB}) + m(\hat{BOC}) = 2 \cdot m(\hat{MOB}) + 2 \cdot m(\hat{BON}) = 2 \cdot (m(\hat{MOB}) + m(\hat{BON})) =</math> <math display="block">= 2 \cdot m(\hat{MON}) = 2 \cdot 115^\circ = 230^\circ &gt; 180^\circ</math> <math display="block">m(\hat{AOB}) + m(\hat{BOC}) + m(\hat{AOC}) = 360^\circ \text{ (unghiuri formate în jurul unui punct)}</math> <math display="block">m(\hat{AOC}) = 360^\circ - 230^\circ = 130^\circ</math></p>	<b>3p</b>
	<p><b>b)</b> Fie <math>[OP]</math> bisectoarea unghiului <math>\hat{AOC}</math> și <math>[OS]</math> semidreapta opusă semidreptei <math>[OP]</math>.  <math display="block">m(\hat{AOP}) = m(\hat{POC}) = \frac{m(\hat{AOC})}{2} = 65^\circ</math> <math display="block">m(\hat{AOS}) = 180^\circ - m(\hat{AOP}) = 115^\circ</math></p>	<b>2p</b>
	<p><math>m(\hat{AOB}) &gt; m(\hat{BOC})</math> și <math>m(\hat{AOB}) + m(\hat{BOC}) = 230^\circ \Rightarrow m(\hat{AOB}) &gt; \frac{230^\circ}{2} \Rightarrow</math>  <math>\Rightarrow m(\hat{AOB}) &gt; 115^\circ</math>, și cum <math>m(\hat{AOS}) = 115^\circ</math>, iar <math>S \in [AO; B]</math>, rezultă că  <math>S \in \text{Int } \hat{AOB}</math>.  <math display="block">m(\hat{AOB}) = m(\hat{AOS}) + m(\hat{SOB}) = 115^\circ + 57^\circ = 172^\circ</math> <math display="block">m(\hat{BOC}) = 230^\circ - m(\hat{AOB}) = 58^\circ</math></p>	<b>3p</b>
<b>4.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
	 <p>Fie <math>\frac{BC}{5} = \frac{CD}{3} = x</math>, atunci <math>BC = 5x</math> și <math>CD = 3x</math>.  <math>BD = BC + CD = 8x</math>.  <math>8x = 16 \Rightarrow x = 2</math>  <math>BC = 5 \cdot 2 = 10</math> (cm) și <math>CD = 3 \cdot 2 = 6</math> (cm)</p>	<b>3p</b>
	<p><math>AD = 2PD</math>  <math>B \in (AD) \Rightarrow AD &gt; BD \Rightarrow AD &gt; 16</math> cm</p>	<b>2p</b>
	<p><math>AD</math>, <math>BC</math> și <math>PD</math> sunt laturile unui triunghi, dacă: <math>AD + BC &gt; PD</math>, <math>AD + PD &gt; BC</math> și <math>PD + BC &gt; AD</math>.  <math>AD + BC &gt; PD</math>, pentru că <math>AD &gt; PD</math> și <math>BC &gt; 0</math>.  <math>AD + PD &gt; BC</math>, pentru că <math>AD &gt; BC</math> și <math>PD &gt; 0</math>.  <math>PD + BC &gt; AD \Leftrightarrow PD + 10 &gt; 2PD \Leftrightarrow PD &lt; 10</math>, deci a treia condiție este îndeplinită numai dacă <math>PD &lt; 10</math> cm  <math>PD &lt; 10</math> cm <math>\Rightarrow AD &lt; 20</math> cm</p>	<b>2p</b>
	<p><math>AD &gt; 16</math> cm <math>\Rightarrow PD &gt; 8</math> cm <math>\Rightarrow PD &gt; CD</math>, iar din <math>PD &lt; 10</math> cm <math>\Rightarrow PD &lt; BD</math>, deci este îndeplinită condiția: <math>P \in (BC)</math>  <math>AD &gt; 16</math> cm și <math>AD &lt; 20</math> cm <math>\Rightarrow AD = 17</math> cm sau <math>AD = 18</math> cm sau <math>AD = 19</math> cm</p>	<b>2p</b>