OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

BAREM

CLASA A XI-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}_+)$	**1p**
	Din $A\cdot X = X\cdot A$ obținem $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$	**2p**
	Demonstrăm cu inducție matematică că $X^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$	**2p**
	Din egalitatea $X^{2016}+X=A$ obținem ecuațiile $a^{2016}+a=2$ și $2016a^{2015}\cdot b+b=2016$	**2p**
	Din ecuația $a^{2016}+a=2 \Rightarrow a=1$ singura soluție reală pozitivă și din ecuația $2016a^{2015}\cdot b+b=2016 \Rightarrow b=\frac{2016}{2017}$ Soluția ecuației este: $X=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2016}{2017} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Aplicând teorema cosinusului avem: $b\cos C + c\cos B = b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a$	**3p**
	Adunăm primele două coloane ale determinantului şi obţinem: $\begin{vmatrix} b\cos C & b\cos C + c\cos B & \sin A \\ c\cos A & c\cos A + a\cos C & \sin B \\ a\cos B & a\cos B + b\cos A & \sin C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b\cos C & a & \sin A \\ c\cos A & b & \sin B \\ a\cos B & c & \sin C \end{vmatrix}$	**2p**
	Din teorema sinusurilor rezultă că $\sin A=\frac{a}{2R}$.	**2p**
	Înlocuind în determinant obţinem $\begin{vmatrix} b\cos C & a & \frac{a}{2R} \\ c\cos A & b & \frac{b}{2R} \\ a\cos B & c & \frac{c}{2R} \end{vmatrix}=\frac{1}{2R}\begin{vmatrix} b\cos C & a & a \\ c\cos A & b & b \\ a\cos B & c & c \end{vmatrix}=0$	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Ecuația de gradul doi cu coeficienți numere reale $z^2 - a_n z + a_n = 0$ are soluții numere complex dacă $\Delta < 0 \Leftrightarrow a_n^2 - 4a_n < 0 \Rightarrow a_n \in (0;4)$	**1p**
	Fie z_1, z_2 rădăcinile complexe ale ecuației, atunci $\lvert z_1\rvert^2 = \lvert z_2\rvert^2 = z_1 \cdot z_2$ Deoarece $z_1 \cdot z_2 = a_n$ obținem $a_{n+1} = \lvert z_1\rvert = \sqrt{z_1 \cdot z_2} = \sqrt{a_n}$	**2p**
	Din $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $a_0 = 2$ obținem: $a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $a_2 = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2^2}}$.	**2p**
	Presupunem $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}}$ și calculăm valoarea termenului a_{n+1}. $a_{n+1} = \sqrt{a_n} = \sqrt{2^{\frac{1}{2^n}}} = 2^{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^{n+1}}}$. Deci termenul general al șirului este: $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}}$ $\forall n \in N$. .	**2p**
	b.) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{2^n}} - 1}{\frac{1}{2^n}} = \ln 2$	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Deoarece $\sqrt{2016} = 44,89...$, obținem că pentru elementele mulțimii $B_{2016} = \{45, 46, ..., 2016\}$ are loc relația $xy \notin B_{2016}$, $\forall x, y \in B_{2016}$, $x \le y$.	**2p**
	Dacă am completa cu orice alt element *x* din mulțimea $A_{2016} = \{1, 2, ..., 2016\}$, elementul 45*x* aparține mulțimii $B_{2016} = \{45, 46, ..., 2016\}$. Deci numărul elementelor mulțimii *B* nu poate fi mărit.	**1p**
	$b_{2016} = \lvert B_{2016}\rvert = 2016 - 45 + 1 = 1972$	**1p**
	b) Generalizând rezultatul obținut la punctul a) obținem: $b_n = n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.	**2p**
	c) Deoarece $b_i = i - k$, pentru $\forall i \in \underbrace{\{k^2, k^2+1, ..., (k+1)^2 - 1\}}_{2k+1 \text{ elemente}}$, avem $\sum\limits_{i=1}^{n^2-1} b_i = \sum\limits_{i=1}^{n^2-1}\left(i - \left[\sqrt{i}\right]\right) = \sum\limits_{i=1}^{n^2-1} i - \sum\limits_{k=1}^{n-1} k(2k+1) = \dfrac{(n^2-1)n^2}{2} - \left[2\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \dfrac{n(n-1)}{2}\right] =$ $= \dfrac{3n^4 - 4n^3 + 3n^2}{6}$.	**2p**
	Limita căutată este: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4 - 4n^3 + 3n^2}{6n^4} = \dfrac{1}{2}$.	**1p**