CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

BAREM

CLASA A IX-A

(4 ore/săptămână)

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$x\in[-3,1]\Rightarrow 0\le x+3\le 4\Rightarrow \lvert x+3\rvert = x+3$, $-4\le x-1\le 0 \Rightarrow \lvert x-1\rvert=-x+1$	**2p**
	$x\in[-3,1]$ și $x-2y+3=0\Rightarrow y=\frac{x+3}{2}\in[0,2]$	**1p**
	$K=\sqrt{x^2+6x+9+y^2}+\sqrt{x^2-2x+1+y^2-4y+4}$	**1p**
	$K=\sqrt{(x+3)^2+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}+\sqrt{(x-1)^2+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$	**1p**
	$\Rightarrow K=\lvert x+3\rvert\cdot\frac{\sqrt5}{2}+\lvert x-1\rvert\cdot\frac{\sqrt5}{2}=\frac{\sqrt5}{2}\left(\lvert x+3\rvert+\lvert x-1\rvert\right)$	**2p**
	$\Rightarrow K=\frac{\sqrt5}{2}(x+3-x+1)=2\sqrt5$	**1p**
	$\Rightarrow [K]=\left[2\sqrt5\right]=4$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $\frac{2n}{a_n}=\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{n+1}{a_{n+1}}\Rightarrow\frac{n}{a_n}=\frac12\left(\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)\Leftrightarrow x_n=\frac12\left(x_{n-1}+x_{n+1}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ de unde rezultă că $(x_n)_{n\ge1}$ este progresie algebrică	**2p**
	Rația progresiei este $r=x_2-x_1=\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{14}{3}-3=\frac53$	**1,5p**
	$x_n=x_1+(n-1)r=3+(n-1)\frac53=\frac{5n+4}{3},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	**1,5p**
	b) $x_n=\frac{5n+4}{3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x_n=2n+1-\frac{n-1}{3}\in\mathbb{Z}\overset{n\in\mathbb{N}^*}{\Rightarrow}\frac{n-1}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow n-1=3k,\ k\in\mathbb{N}$ de unde obținem $n=3k+1,\ k\in\mathbb{N}$	**3p**
	Subșirul cu termenii numere întregi este: $(y_k)_{k\ge0}$, $y_k=x_{3k+1}=5k+3,\ k\in\mathbb{N}$	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $x=[x]+\{x\},\forall x\in\mathbb{R}$ unde $\{x\}\in[0,1)$ și $\{x+n\}=\{x\},\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$-\frac12=-1+\frac12,-\frac32=-2+\frac12,\ldots,-\frac{2015}{2}=-1008+\frac12$	**1p**
	$\Rightarrow f\left(-\frac12\right)=f\left(-\frac32\right)=\ldots=f\left(-\frac{2015}{2}\right)=\sqrt{\frac12-\left(\frac12\right)^2}=\frac12\Rightarrow$ Suma cerută este: $1008\cdot\frac12=504.$	**2p**

	b) $\frac{x+2}{3}=k, k\in N^* \Rightarrow x=3k-2$	**1p**
	Avem $\left[\sqrt{\frac{3k-2+5}{3}}\right]=k$ de unde obținem $\left[\sqrt{k+1}\right]=k$ și $k\le\sqrt{k+1}<k+1$	**1p**
	$k\le\sqrt{k+1}\Rightarrow k\in\left[0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right], k\in N^*\Rightarrow k=1\,(1)$ $\sqrt{k+1}<k+1$adevărat pentru orice $k>0\,(2)$	**2p**
	Din (1) şi (2) rezultă că $S=\{1\}$.	**1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	Fie $\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}=k$	**1p**
	a) Avem $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+k\cdot\overrightarrow{AC}}{1+k}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{\overrightarrow{BC}+k\cdot\overrightarrow{BA}}{1+k}$, $\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{CA}+k\cdot\overrightarrow{CB}}{1+k}$ de unde obținem: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}}{1+k}+k\cdot\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}}{1+k}=\vec{0}$ condiția suficientă pentru ca segmentele AM, BN și CP să constituie laturile unui triunghi.	**3p**
	b) Analog cu punctul a) avem: $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+k\cdot\overrightarrow{OC}}{1+k}+\frac{\overrightarrow{OC}+k\cdot\overrightarrow{OA}}{1+k}+\frac{\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB}}{1+k}=\frac{(1+k)\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)}{1+k}=$ $=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	**2p**
	c) Fie G și G' centrul de greutate al triunghiurilor ABC și MNP. Avem $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}\\ \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG'}\end{array}\right\}\overset{b)}{=}\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG'}\Rightarrow G=G'$.	**3p**