CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

BAREM

CLASA A XII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $x*y = xy-\alpha(x+y)+\alpha^2+\alpha = (x-a)(y-a)+a > a$ pentru orice $x, y > a$ deci G_α este parte stabilă a mulţimii R în raport cu legea de compoziţie * .	**2p**
	b) $x*e = xe-3(x+e)+12 = x \Rightarrow e = 4 \in G_3$	**1p**
	$5*z = z*5 = 4 \Rightarrow z = \frac{7}{2} \in G_3$ elementul simetric pentru 5.	**2p**
	c) $x*x = (x-3)^2+3$ și se arată prin metoda inducției matematice că: $\underbrace{x*x*...*x}_{k-ori} = (x-3)^k+3,\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$	**2p**
	$\sum_{k=5}^{10} \underbrace{x*x*...*x}_{k-ori} = \sum_{k=5}^{10}\left[(x-3)^k+3\right] = (x-3)^5+(x-3)^6+...+(x-3)^{10}+18$	**1p**
	Obținem $f(x) = (x-3)^5+(x-3)^6+...+(x-3)^{10}$ de unde $f(5) = 2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10} = 2016$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $A^2 = -I_2;\ A^3 = -A;\ A^4 = I_2;$	**2p**
	$M = \{I_2, -I_2, A, -A\}$	**1p**
	b) Tabela operației: (tabelul de mai jos)	**2p**
	Înmulţirea este operaţie internă: $\forall X, Y \in M \Rightarrow X \cdot Y \in M$ (rezultă din tabel). (1)	**0,5p**
	Înmulțirea matricelor este asociativă. (2)	**0,5p**
	Tabelul operației este simetric față de prima diagonală , rezultă că înmulțirea este comutativă în mulțimea *M*. (3)	**1p**
	Elementul neutru este: I_2. (4)	**0,5p**
	Fiecare element din mulțimea *M* este simetrizabil: $I_2^{-1} = I_2;\ -I_2^{-1} = -I_2;\ A^{-1} = -A;\ -A^{-1} = A$. (5)	**1p**
	Din (1)- (5) rezultă că $(M, \cdot)$ este grup comutativ.	**0,5p**

$\cdot$	I_2	$-I_2$	A	$-A$
I_2	I_2	$-I_2$	A	$-A$
$-I_2$	$-I_2$	I_2	$-A$	A
A	A	$-A$	$-I_2$	I_2
$-A$	$-A$	A	I_2	$-I_2$

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	F este o primitivă a lui $f \Leftrightarrow F`(x) = f(x), \forall x \in (-1, \infty)$	**2p**
	$F`(x) = \dfrac{(a+2b)x^2 + (2b+c)x + a + c}{(x+1)(x^2+1)}$	**3p**
	$\begin{cases} a+2b=0 \\ 2b+c=2 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=\dfrac{1}{2}, c=1$	**4p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	$F(x) = \int f(x)dx = \int \dfrac{1}{x(1+\ln x)}dx = \ln(1+\ln x) + C$	**4p**
	$F(e^{e-1}) = \ln(1+\ln e^{e-1}) + C = \ln e + C = 1 + C$	**3p**
	$1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$	**1p**
	$F(x) = \ln(1+\ln x) + 1$	**1p**